Tema 3: Cinemática de la partícula

FÍSICA XERAL I

GRAO EN FÍSICA

1. Velocidad. Hodógrafa.

La parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar la causa que los produce se denomina ***cinemática***.

En este momento, los cuerpos en movimiento los representaremos por lo que se denomina ***partícula*** o ***punto material***, para indicar que los cuerpos, con independencia de su tamaño, los vamos a estudiar en su movimiento como un todo, despreciando cualquier rotación con respecto a su propio centro de masa o en torno a cualquier eje que lo atraviese.

- Vector de posición

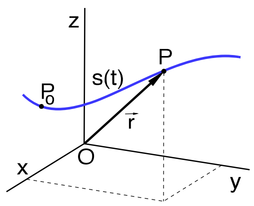
Para fijar la posición de la partícula dentro de un sistema de referencia en el cual queremos estudiar su movimiento, utilizaremos un vector, cuyo origen coincide con el origen del sistema de referencia, y cuyo extremo estará sobre el lugar ocupado por la partícula. A este vector se le denomina ***vector de posición*** que, en general, será función del tiempo.

Así, en un sistema de coordenadas cartesianas

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1)$$

donde las coordenadas son función del tiempo

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (2)$$

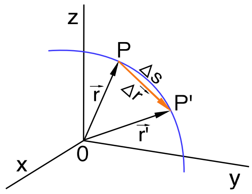


Las expresiones (2) son las ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio denominada ***trayectoria***, que es el lugar geométrico de los puntos del espacio ocupados por la partícula en los diferentes instantes. La eliminación del tiempo entre estas ecuaciones permite obtener la ecuación cartesiana de la trayectoria.

El movimiento de la partícula puede ser descrito mediante la trayectoria. Para ello se fija un punto P_o de forma que la posición de la partícula P puede establecerse mediante la longitud de arco recorrido s(t) .

- Vector velocidad

Una partícula se encuentra en un instante dado en el punto P cuyo vector de posición es $\vec{r}$. En un intervalo de tiempo Δt la partícula pasa de P a P' donde su vector de posición es $\vec{r'}$.

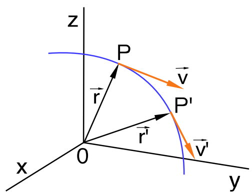


Se define la ***velocidad media*** de la partícula en el intervalo Δt por

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{3}$$

donde $\Delta \vec{r} = \vec{r'} - \vec{r}$ representa el cambio experimentado por el vector de posición en el intervalo Δt.
Debemos darnos cuenta que $\Delta \vec{r}$ representa un cambio, tanto en la dirección como en el módulo del vector de posición.

Si en la expresión (3) escogemos los intervalos de tiempo Δt cada vez más pequeños, y por lo tanto los $\Delta \vec{r}$ más cortos, en el límite $\Delta t \to 0$, $\Delta \vec{r}$ se hace tangente a la curva.



Se define la ***velocidad instantánea*** de la partícula en el instante t por

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \tag{4}$$

por consiguiente, el vector $\vec{v}$ resulta ser un vector tangente a la trayectoria en cada punto.
Si consideramos que el vector de posición está dado en coordenadas cartesianas, entonces de acuerdo con las expresiones (1) y (2) tendremos que

$$v_x = \dot{x}(t), \quad v_y = \dot{y}(t), \quad v_z = \dot{z}(t), \tag{5}$$

Si utilizamos para describir el movimiento la longitud de arco recorrido s(t)

Se define la ***celeridad*** de la partícula por

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{6}$$

Para relacionar la velocidad instantánea $\vec{v}$ y la celeridad v, procedamos de la siguiente forma:

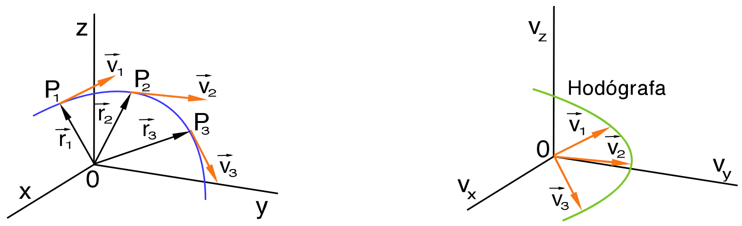
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{r}}{ds}$$

Ahora bien

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau}, \quad |\vec{\tau}| = 1$$

ya que el cociente $\Delta\vec{r}/\Delta s$ debe ser un vector y en el límite cuando P' tiende a P el módulo de $\Delta\vec{r}$ tiende al arco Δs.
Resulta entonces que

$$\vec{v} = v\,\vec{\tau} \tag{7}$$



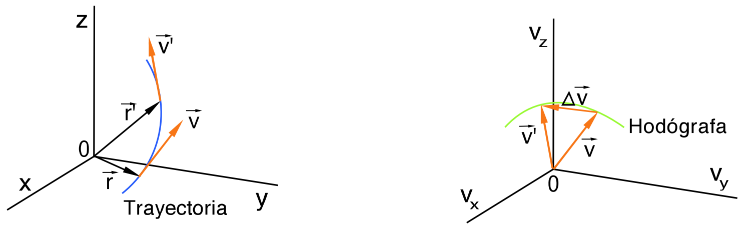
Supongamos que en un instante t_1 la partícula se encuentra en el punto P_1 con una velocidad $\vec{v}_1$, que en el instante t_2 la partícula se encuentra en el punto P_2 con una velocidad $\vec{v}_2$, etc.

Construyamos un nuevo sistema de coordenadas donde cada eje representa la correspondiente componente cartesiana de la velocidad. Representemos en él vectores equipolentes a los vectores velocidad $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3, \ldots$ Los extremos de los vectores velocidad con origen común determinan una curva en el espacio de velocidades que se denomina ***hodógrafa***.

2. Aceleración. Componentes intrínsecas.

- Vector aceleración

Consideremos que la velocidad de una partícula en un instante t es $\vec{v}$ y transcurrido un tiempo Δt su velocidad es $\vec{v'}$.



En el tiempo Δt, la velocidad habrá cambiado en dirección y módulo. Sea $\Delta\vec{v}$ el vector que refleja dicho cambio.

Se define la ***aceleración media*** en el intervalo Δt como

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{8}$$

Si en la expresión (8), hacemos que Δt tienda a cero

obtenemos la ***aceleración instantánea*** definida por

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{9}$$

Observemos que el vector aceleración es tangente a la hodógrafa y sin embargo, en general, no es tangente a la trayectoria. En cada punto, el vector velocidad y el vector aceleración determinan un plano que se conoce como *plano osculador*.
Si el vector velocidad está expresado en coordenadas cartesianas, entonces de acuerdo con (5), escribiremos

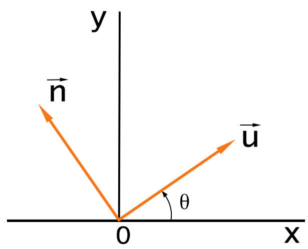
$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}(t), \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}(t), \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}(t), \tag{10}$$

- Derivada de un vector unitario cuya orientación cambia con el tiempo

Supongamos un plano y en él un vector unitario $\vec{u}$ cuya dirección cambia con el tiempo.

El cambio en la orientación de $\vec{u}$ viene dado en función del ángulo $\theta(t)$ que forma con el eje x.
Expresemos $\vec{u}$ en función de θ. Como $|\vec{u}|$=1, resulta

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j} \tag{11}$$



Derivando respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = (-\operatorname{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})\,\frac{d\theta}{dt} = \vec{n}\,\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\;\vec{n} \tag{12}$$

siendo

$$\vec{n} = (-\operatorname{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) \qquad y \qquad |\vec{n}| = 1 \tag{13}$$

Resulta inmediato ver que $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$, es decir que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares como se indica la figura.

Derivemos ahora al vector $\vec{n}$ respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = (-\cos\theta\vec{i} - \operatorname{sen}\theta\vec{j})\,\frac{d\theta}{dt} = -\vec{u}\,\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\;\vec{u} \tag{14}$$

- Componentes normal y tangencial de la aceleración

Vamos a considerar en primer lugar el caso de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria contenida en un plano.

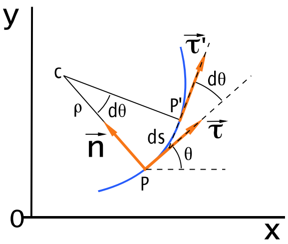
De acuerdo con la ecuación (7) la velocidad puede expresarse por $\vec{v} = v\;\vec{\tau}$, por consiguiente la aceleración de la partícula vendrá dada por

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \tag{15}$$

Como $\vec{\tau}$ es el vector unitario tangente a la trayectoria, éste irá cambiando su orientación a medida que la partícula se desplaza sobre la trayectoria. Por tanto, podemos hacer uso del resultado dado por la ecuación (12), de forma que

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\dot{\theta}\vec{n} \tag{16}$$

En la figura se representan dos instantes infinitamente próximos P y P'. Las perpendiculares a los vectores $\vec{\tau}$ y $\vec{\tau}'$ se cortan en el punto C denominado ***centro instantáneo de curvatura***. Como P y P' están infinitamente próximos, los segmentos CP≈CP'=ρ (***radio de curvatura)***.



Al pasar la partícula de P a P', la orientación del vector unitario tangente habrá variado en $d\theta$, que es el mismo ángulo que forman los segmentos CP y CP'.

Teniendo en cuenta que el arco ds y el ángulo $d\theta$ están relacionados por $ds = \rho\ d\theta$, podemos escribir

$$\frac{ds}{dt} = \rho\ \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = \rho\ \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{v}{\rho} \tag{17}$$

Si llevamos este último resultado a la ecuación (16), llegamos finalmente a

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \tag{18}$$

Al término

$$a_t = \frac{dv}{dt} \tag{19}$$

se le denomina ***componente tangencial de la aceleración***, y refleja el cambio en el módulo de la velocidad.
Mientras que

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{20}$$

es la ***componente normal de la aceleración*** y refleja el cambio en la dirección del movimiento de la partícula.

Dependiendo de si el módulo de la velocidad de la partícula aumenta o disminuye, a_t será positiva o negativa, y $\vec{a}_t$ apunta en la dirección del movimiento o en su contra.

Como a_n es siempre positiva, $\vec{a}_n$ siempre está dirigida hacia el centro de curvatura.

La aceleración de la partícula será cero sólo si lo son ambas componentes.

Los movimientos en que el módulo de la velocidad se mantiene constante, $v = cte$, se denominan ***uniformes***, y en ellos la aceleración tangencial es nula.

Si la trayectoria es recta,***movimiento rectilíneo***, la aceleración normal es nula por ser infinito el radio de curvatura en todos sus puntos.

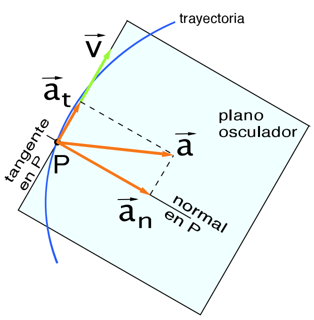
La componente tangencial de la aceleración puede relacionarse con el espacio recorrido sobre la trayectoria. En efecto

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{21}$$

El radio de curvatura ρ puede calcularse mediante la ecuación (20) conociendo a_t y v. Otra forma útil de calcular ρ, es la siguiente: si utilizamos las ecuaciones (12) y (17), tendremos

$$\dot{\theta} = \frac{v}{\rho}\ , \quad \dot{\theta} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{v}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|} \tag{22}$$

Las ecuaciones anteriores obtenidas para una trayectoria plana, también son válidas para el caso de una trayectoria en el espacio, estando la velocidad, la aceleración y sus componentes en un mismo plano denominado ***osculador***. La orientación de dicho plano cambia con el punto P sobre la trayectoria.



Ejemplo 1

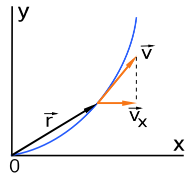
Un móvil parte del origen del sistema de referencia y recorre la parábola $2y = x^2$, en la que x e y están expresadas en metros, siendo la proyección de la velocidad sobre el eje OX constante $v_x = 2\ m/s$. Calcular: a) la velocidad; b) la aceleración; c) las componentes tangencial y normal de la aceleración; d) el radio de curvatura.

Si tenemos en cuenta que el vector de posición viene dado por

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + \frac{x^2}{2}\vec{j}$$

el vector velocidad será

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{dx}{dt}\vec{j}$$



Ahora, como sabemos que

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2dt$$

al integrar la expresión anterior, teniendo en cuenta que para $t = 0$ se encuentra en el origen $x = 0$, resulta

$$\int_0^x dx = 2\int_o^t dt \quad \Rightarrow \quad x = 2t$$

Ahora ya podemos expresar el vector de posición en función del tiempo

$$\vec{r} = 2t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$$

a) Vector velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 4t\vec{j}$$

b) Vector aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{j}$$

c) Calculemos en primer lugar el vector unitario tangente

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2\vec{i} + 4t\vec{j}}{\sqrt{4 + 16t^2}} = \frac{\vec{i} + 2t\vec{j}}{\sqrt{1 + 4t^2}}$$

La componente tangencial de la aceleración será

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{\tau} = \frac{8t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

Si tenemos en cuenta que

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = 16 - \frac{64t^2}{1+4t^2} = \frac{16}{1+4t^2}$$

y la aceleración normal

$$a_n = \frac{4}{\sqrt{1+4t^2}}$$

d) El radio de curvatura

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4+16t^2}{4} \sqrt{1+4t^2} = \left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

- Componentes radial y transversal

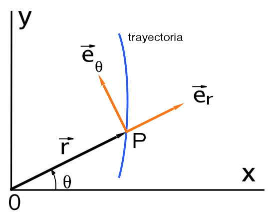
En algunos tipos de movimientos planos resulta más útil describir el movimiento de una partícula utilizando un sistema de referencia diferente.

Como podemos ver en la figura, si denominamos $\vec{e}_r$ al vector unitario

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

resulta que

$$\vec{r} = r\ \vec{e}_r \qquad (23)$$



Derivemos respecto al tiempo la expresión anterior

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \qquad (24)$$

y teniendo en cuenta la ecuación (12)

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\ \dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad (25)$$

donde $\vec{e}_\theta$ es el vector normal a $\vec{e}_r$ y sentido el de crecimiento de θ.

Si derivamos respecto al tiempo la ecuación (25), obtendremos la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \tag{26}$$

utilizando las ecuaciones (12) y (14)

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r \tag{27}$$

agrupando términos

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta \tag{28}$$

Resumiendo, las componentes de la velocidad y aceleración en las direcciones radial y transversal son los escalares:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{29}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \tag{30}$$

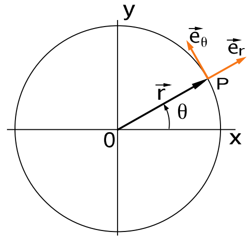
Ejemplo 2

Analizar las componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración en el caso de que el móvil se mueva sobre una circunferencia centrada en el origen de coordenadas y contenida en el plano xy.

En este caso, al ser la trayectoria una circunferencia centrada en el origen de coordenadas, el módulo del vector de posición es constante, $|\vec{r}| = r = cte$ y por lo tanto $\dot{r} = \ddot{r} = 0$.

Por otro lado, según la ecuación (17)

$$\dot{\theta} = \frac{v}{\rho} = \frac{v}{r}, \quad \ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dt}$$



Llevando estos resultados a las ecuaciones (29) y (30), obtenemos

$$v_r = 0, \quad v_\theta = v \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = v\vec{e}_\theta$$

$$a_r = -\frac{v^2}{r}, \quad a_\theta = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$$

3. Análisis de los distintos tipos de movimientos.

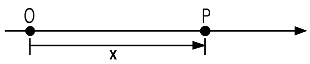
Para abordar el estudio del movimiento de una partícula, habrá que conocer con detalle las características del mismo y proceder a resolver el problema concreto que estemos considerando.

Si embargo, algunas situaciones pueden ser analizadas en general, con independencia del problema particular de que se trate.
A continuación analizaremos los siguientes casos:

1. Movimiento rectilíneo.

Se dice que una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta tiene un ***movimiento rectilíneo***.

Para mayor simplicidad supondremos que la partícula se mueve según el eje x.



En este caso, las expresiones de la velocidad y la aceleración se reducen a

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{31a}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{31b}$$

Otra relación útil para la aceleración puede obtenerse de la anterior de la siguiente forma

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \tag{31c}$$

Analicemos los dos casos siguientes:

i **Movimiento rectilíneo uniforme**
Al ser uniforme se cumple que $v = v_o = cte$ y por lo tanto $a = 0$. Si suponemos que en el instante inicial, t=0, la partícula se encuentra en la posición $x = x_o$, la ecuación (31a) nos conduce a

$$\int_{x_o}^{x} dx = v_o \int_{o}^{t} dt \qquad \Rightarrow \qquad x = x_o + v_o t \tag{32}$$

ii **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado**
En este tipo de movimiento $a = cte$. Suponiendo que en el instante inicial, t=0, la partícula se encuentra en la posición $x = x_o$ con velocidad v_o, de la ecuación (31b) obtenemos

$$\int_{v_o}^{v} dv = a \int_{o}^{t} dt \qquad \Rightarrow \qquad v = v_o + at \tag{33}$$

llevando este valor de v a la ecuación (31a), resulta

$$\int_{x_o}^{x} dx = \int_{o}^{t} (v_o + at) dt \qquad \Rightarrow \qquad x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{34}$$

Por último, utilizando la ecuación (31c)

$$\int_{v_o}^{v} v dv = a \int_{x_o}^{x} dx \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o) \tag{35}$$

Ejemplo 3

Un avión lleva una aceleración constante $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Se ha medido su velocidad en el instante $t = 10\ s$, $\vec{v}_{10} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$, y se ha observado que en el instante $t = 4\ s$ pasaba por la vertical (eje OZ) con cota $z = 6$. Calcular en función del tiempo la velocidad y la posición del avión.

De la definición de la aceleración, podemos escribir

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} + 2\vec{j} \quad \Rightarrow \quad d\vec{v} = (\vec{i} + 2\vec{j}) dt$$

Si ahora integramos entre el instante $t = 10\, s$ y otro instante cualquiera t

$$\int_{\vec{v}_{10}}^{\vec{v}} d\vec{v} = (\vec{i} + 2\vec{j}) \int_{10}^{t} dt$$

es decir

$$\vec{v} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} + (\vec{i} + 2\vec{j})(t - 10)$$
$$= (t - 5)\vec{i} + (2t - 14)\vec{j} + \vec{k}$$

Calculemos ahora el vector de posición

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} = \vec{v}dt$$

Si tenemos en cuenta el valor obtenido para $\vec{v}$, resulta

$$\int_{\vec{r}_4}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_4^t \left[(t-5)\vec{i} + (2t-14)\vec{j} + \vec{k}\right] dt$$

y como $\vec{r}_4 = 6\vec{k}$

$$\vec{r} = 6\vec{k} + \left[\left(\frac{t^2}{2} - 5t\right)\vec{i} + \left(t^2 - 14t\right)\vec{j} + t\vec{k}\right]_4^t$$

haciendo operaciones

$$\vec{r} = \left(\frac{t^2}{2} - 5t + 12\right)\vec{i} + \left(t^2 - 14t + 40\right)\vec{j} + (t+2)\vec{k}$$

---

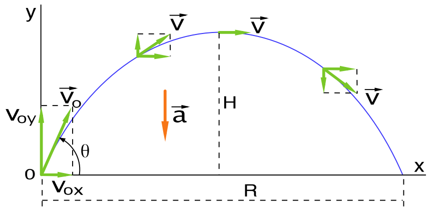
2. Movimiento de proyectiles.

Un proyectil es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada por la aceleración gravitatoria y cualquier otra acción ejercida por el medio en el que se mueve.

En lo que sigue estudiaremos un modelo simplificado donde representaremos al proyectil como una partícula que está exclusivamente sometida a la fuerza gravitatoria lo que le provoca una aceleración constante en magnitud y dirección.

Por lo tanto, el movimiento del proyectil está limitado a un plano vertical determinado por la dirección de la velocidad inicial. Tomaremos en este plano un sistema de referencia con el eje x horizontal y el eje y vertical y hacia arriba.

Analizaremos el movimiento del proyectil como una combinación de movimientos: uno horizontal con aceleración nula, $a_x = 0$, y otro vertical con aceleración constante $a_y = -g$.



Movimiento en el eje x

Supondremos que en el instante inicial $t = 0$, $x_o = 0$, $v_{ox} = v_o \cos\theta$

Por lo tanto

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_x = v_{ox} = v_o \cos\theta \tag{36}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^x dx = v_o \cos\theta \int_0^t dt$$

$$x = v_o\ t \cos\theta \tag{37}$$

Movimiento en el eje y

Supondremos que en el instante inicial $t = 0$, $y_o = 0$, $v_{oy} = v_o \operatorname{sen}\theta$

Entonces

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g \qquad \Rightarrow \qquad \int_{v_{oy}}^{v_y} dv_y = -g \int_0^t dt$$

$$v_y = v_o \operatorname{sen}\theta - gt \tag{38}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^y dy = \int_0^t (v_o \operatorname{sen}\theta - gt)dt$$

$$y = v_o\ t \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}gt^2 \tag{39}$$

En cualquier instante la posición del proyectil está dado por las coordenadas (x,y), su celeridad por $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ formando un ángulo α con la horizontal, tal que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x}$.

Para calcular la posición del punto más alto alcanzado por el proyectil hacemos $v_y = 0$ en la ecuación (38) y despejamos t

$$t = \frac{v_o \operatorname{sen}\theta}{g}$$

y lo sustituimos en las ecuaciones (37) y (39)

$$x_H = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{g}, \quad H = \frac{(v_o \operatorname{sen}\theta)^2}{2g}$$

El alcance horizontal máximo R alcanzado por el proyectil se obtiene haciendo y=0 en la ecuación (39), despejando el tiempo

$$t = \frac{2v_o \operatorname{sen}\theta}{g}$$

y sustituyéndolo en la ecuación (37)

$$R = \frac{2v_o^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{g}$$

Por último, para obtener la ecuación de la trayectoria en términos de x e y debemos despejar el tiempo en la ecuación (37)

$$t = \frac{x}{v_o \cos\theta}$$

y sustiuirlo en la expresión (39)

$$y = x \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta}x^2$$

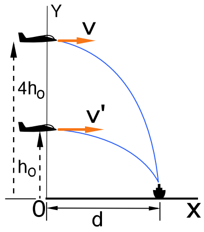
que es la ecuación de una *parábola*.

Ejemplo 4

Dos aviones, que vuelan horizontalmente, se encuentran en un instante dado en la misma vertical, posición desde la cual pretenden bombardear el mismo objetivo. Sabiendo que la altura sobre el suelo de uno de ellos es cuatro veces mayor que la del otro y siendo v la velocidad del que vuela más alto ¿qué velocidad debe llevar el que vuela más bajo?

En el instante $t = 0$ las velocidades de los proyectiles arrojados por los aviones tienen el sentido del eje x, y como ambos deben alcanzar el blanco

$$d = vt = v't' \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{t'} = \frac{v'}{v}$$



Inicialmente los proyectiles no poseen velocidad en el eje y, por lo tanto

$$4h_0 = \frac{1}{2}gt^2, \quad h_0 = \frac{1}{2}gt'^2$$

y al dividir miembro a miembro ambas expresiones

$$4 = \left(\frac{t}{t'}\right)^2 = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v' = 2v$$

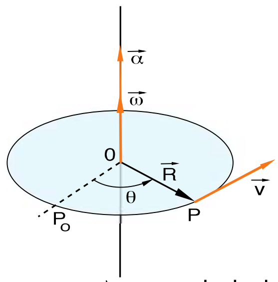
---

3. Movimiento circular

Es un movimiento plano en el que la trayectoria es una circunferencia y, por lo tanto, su radio de curvatura es constante e igual al radio de la misma.

Elegido un punto de la circunferencia como origen de ángulos, definimos la ***velocidad angular*** ω como

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \qquad (40)$$



Si tenemos en cuenta la ecuación (17) y dado que el radio de curvatura es el radio de la circunferencia, $\rho = R$, resulta

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \rightarrow \quad v = \omega\, R \qquad (41)$$

La velocidad angular se puede representar por un vector, $\vec{\omega}$, normal al plano y de sentido el de avance de un tornillo dextrógiro que gire según el sentido del movimiento. Resulta evidente en la figura que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} \qquad (42)$$

Definimos el ***vector aceleración angular*** $\vec{\alpha}$ como

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (43)$$

que tiene la misma dirección que $\vec{\omega}$ en este tipo de movimiento.

La aceleración puede obtenerse derivando respecto al tiempo la velocidad dada por la expresión (42)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{R}}{dt}$$

y como $\vec{R}$ representa el vector de posición de la partícula

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{\alpha} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} \\ &= \vec{\alpha} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) \end{aligned} \qquad (44)$$

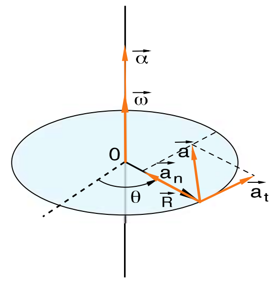
siendo

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{R} \qquad (45)$$

la aceleración tangencial, y

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) \qquad (46)$$

la aceleración normal.

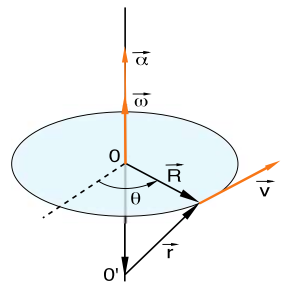


Debemos comprender que los resultados obtenidos anteriormente son independientes del punto O elegido sobre el eje de la circunferencia.

En efecto, si tenemos en cuenta que

$$\vec{R} = \vec{OO'} + \vec{r}$$

podemos escribir



$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \wedge \vec{R} = \vec{\omega} \wedge (\vec{OO'} + \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{OO'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \\ &= \vec{\omega} \wedge \vec{r} \end{aligned}$$

ya que $\vec{\omega} \wedge \vec{OO'} = 0$ por ser $\vec{\omega}$ y $\vec{OO'}$ dos vectores paralelos.

Analizaremos a continuación los siguientes casos:

¡ **Movimiento circular uniforme**

$\omega = cte$ y por lo tanto $v = cte$, $\alpha = 0$, $a_t = 0$, $a_n = \omega^2 R = cte$

Si en el instante t=0, $\theta = \theta_o$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \omega \int_0^t dt$$

$$\theta = \theta_o + \omega t \tag{47}$$

Este tipo de movimiento es *periódico*, puesto que el móvil pasa por cada punto de la trayectoria a intervalos iguales de tiempo que se denominan ***período***.

Entonces, cuando $\theta = \theta_o + 2\pi$ se habrá completado una vuelta. Llamando T al periodo

$$\theta_o + 2\pi = \theta_o + \omega T \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{48}$$

A la inversa del período se le denomina ***frecuencia***

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{49}$$

ii **Movimiento circular uniformemente acelerado**

$\alpha = cte$ y por lo tanto $a_t = \alpha\ R = cte, \quad a_n = \omega^2 R$

Si en el instante t=0, $\theta = \theta_o$ y $\omega = \omega_o$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \alpha \int_0^t dt$$

$$\omega = \omega_o + \alpha t \tag{50}$$

Por otro lado

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_o + \alpha t) dt$$

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{51}$$

Ejemplo 5

Podemos admitir que el centro de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol describe una circunferencia de radio $R = 15 \cdot 10^7\ km$, con velocidad de módulo constante. Calcular el módulo de la citada velocidad y la aceleración del centro de la Tierra.

Admitiendo que la Tierra recorre la órbita alrededor del Sol en 365 días, el tiempo que tarda en recorrerla será

$$t = 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 31536 \cdot 10^3 \ s$$

Como se desplaza con una velocidad de módulo constante

$$|\vec{v}| = v = cte \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

y al ser $a_t = 0$

$$v = \frac{2\pi R}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 10^{10}}{31536 \cdot 10^3} = 29,9 \cdot 10^3 \ \frac{m}{s} = 29,9 \ \frac{km}{s}$$

Como $a_t = 0$, la aceleración coincide con la componente normal

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(29,9 \cdot 10^3\right)^2}{15 \cdot 10^{10}} = 5,96 \cdot 10^{-3} \ \frac{m}{s^2}$$